РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ, 8-9 КЛАССЫ

1. Постройте график функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 9x^2} + \sqrt{4x^4 - 4x^3 + x^2}}{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2}}.$$

Решение. Так как $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2(x-3)^2, 4x^4 - 4x^3 + x^2 = x^2(2x-1)^2, x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^2(x+2)^2$, то при $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{|x-3| + |2x-1|}{|x+2|}. \qquad (1)$$

Итак, область определения функции $f(x)$ — это множество $(-\infty; -2) \bigcup (-2; 0) \bigcup (0; +\infty)$, которое нули подмодульных выражений $x - 3$ и $2x - 1$ разбивают на промежутки знакопостоянства всех подмодульных выражений.

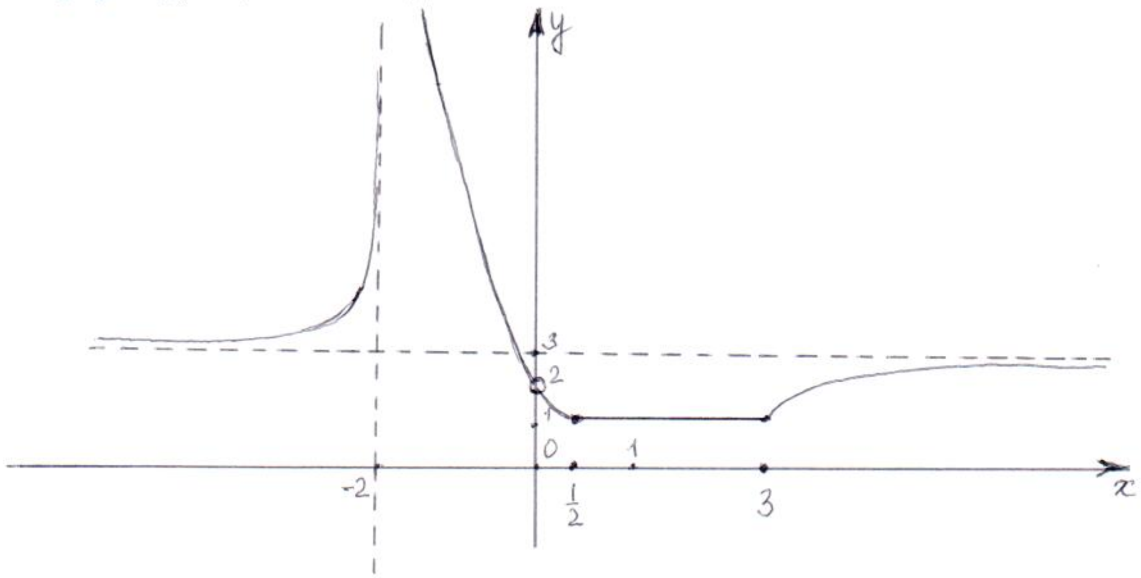
а) Пусть $x < -2$, тогда $f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$, то есть $f(x) = 3 - \frac{10}{x+2}$. График функции на этом промежутке — часть гиперболы, которая получается из графика обратной пропорциональности $y = \frac{-10}{x}$ параллельным переносом на вектор $(-2; 3)$, есть вертикальная асимптота $x = -2$ и горизонтальная асимптота $y = 3$.

б) Пусть $-2 < x \leq 1/2, x \neq 0$, тогда $f(x) = \frac{4-3x}{x+2}$, то есть $f(x) = -3 + \frac{10}{x+2}$, а значит, график функции на этом промежутке — часть гиперболы, которая получается из графика обратной пропорциональности $y = \frac{10}{x}$ параллельным переносом на вектор $(-2; -3)$. Причем, если $x = 1/2$, то $y = 1$, а точка $(0; 2)$ исключена. Есть вертикальная асимптота $x = -2$.

в) Пусть $1/2 < x < 3$, тогда $f(x) = 1$, значит, график функции на этом интервале — часть прямой $y = 1$.

г) Пусть $x \geq 3$, тогда $f(x) = \frac{3x-4}{x+2} = 3 - \frac{10}{x+2}$. График функции на этом промежутке — часть гиперболы, которая получается из графика обратной пропорциональности $y = \frac{-10}{x}$ параллельным переносом на вектор $(-2; 3)$, если $x = 3$, то $y = 1$, есть горизонтальная асимптота $y = 3$.

Итак, график функции имеет вид



Комментарии. Получение для $f(x)$ вида (1) — 1 балл (этот балл не суммируется с другими). Правильный разбор случая в) — 1 балл, правильный разбор любого из случаев а), б) или г) — 2 балла (эти баллы суммируются). Команда забыла исключить точку $(0; 2)$ — снимать один балл.

2. В ряд стоят 15 банок, объём каждой из которых — целое число миллилитров (банки необязательно одинаковые). Если взять любую банку, кроме крайней справа, и прибавить к её объёму удвоенный объём её правого соседа, то получится 15 литров (для каждого из 14 банок). Найдите объём каждой банки.

Ответ: обём каждой банки — 5 литров.

Решение. Рассмотрим крайнюю банку справа, если её объём 5 литров, то объём её соседа тоже равен 5 литрам, так как $15 = v + 2\cdot 5 \;\Rightarrow\; v = 5$. Далее аналогично получаем, что все банки имеют объём 5 литров. Пусть теперь объём самой крайней банки справа равен $5 + x$ литров, где $x \neq 0$ (может быть положительным, может быть отрицательным). Тогда объём её соседа слева равен $5 - 2x$ литров ($15 = v + 2\cdot(5 + x) \;\Rightarrow\; v = 5 - 2x$.) Далее, третья банка справа имеет объём $5 + 4x$ литров. Вообще, k-я банка справа имеет объём $5 + (-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}x$ (можно доказать индукцией по k: база индукции уже есть, переход индукции доказывается так: $15 = v + 2\cdot(5 + (-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}x \;\Rightarrow\; v = 15 - 2\cdot 5 - 2\cdot(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}x = 5 + (-1)^k\cdot 2^k x)$. Тогда объём 14-й банки справа равен $5 - 8192x$ литров, а 15-й банки — $5 + 16384x$ литров. Так как из условия задачи следует, что x — ненулевое число, не меньшее по модулю, чем 0.001, то либо объём 14-й банки справа отрицательный (если $x > 0$), либо объём 15-й банки справа отрицательный (если $x < 0$). В любом случае, это невозможно. Значит, единственный возможный вариант — все банки имеют объём 5 литров.

Комментарии. Только верный ответ — 1 балл. Если команда получила верный ответ из предположения, что все банки имеют одинаковый объём, — 2 балла. Эти баллы не суммируются.

3. Ваня и Петя по очереди увеличивают натуральное число так, чтобы при каждом увеличении разность между новым и старым значениями числа была бы больше нуля, но меньше старого значения. Начальное значение числа равно 2. Выигрывает тот, в результате хода которого получается число 2025. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий Ваня или его партнёр по игре Петя?

Ответ: выигрывает Ваня.

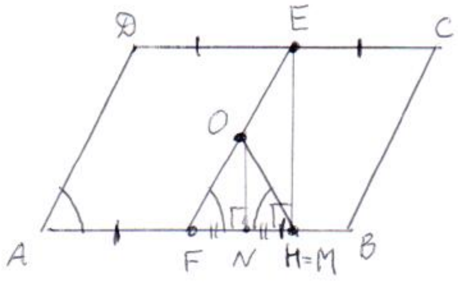
Решение. Опишем выигрышную стратегию для Вани. Своими ходами он последовательно должен получить числа 3, 7, 15, 31, 63, 126, 253, 506, 1012 и, наконец, 2025. Теперь докажем, что Ваня сможет этого добиться, не смотря на действия Пети.

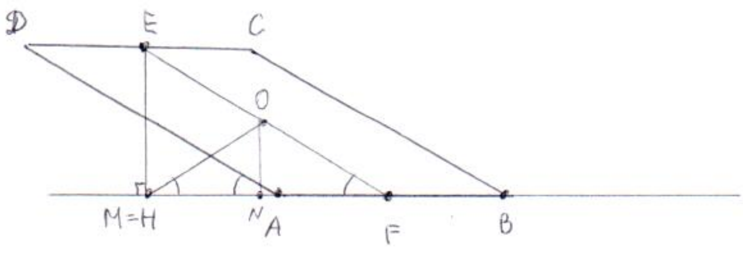
Число, полученное Ваней	3	7	15	31	63
Диапазон чисел, которые может получить Петя	4..5	8..13	16..29	32..61	64..125
Число, полученное Ваней	126	253	506	1012	2025
Диапазон чисел, которые может получить Петя	127..251	254..505	507..1011	1013..2023	проигрыш

Комментарии. Только верный ответ — 0 баллов. Указаны правильные ходы Вани — 3 балла.

4. Точка O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. На прямой AB выбрали точку M так, что $\angle MAD = \angle AMO$. Докажите, что $MD = MC$.

Доказательство. Если точка M «пробегает» луч AB, то угол AMO принимает различные значения при различных положениях точки M, значит, на луче AB есть не более одной точки M_1, такой что $\angle M_1AD = \angle AM_1O$. Аналогично на дополнительном луче к AB существует не более одной точки M_2, такой что $\angle M_2AD = \angle AM_2O$. Если найдутся обе такие точки M_1 и M_2, то $\angle M_2AD + \angle M_1AD = \angle AM_2O + \angle AM_1O$. Но левая часть последнего равенства равна $180°$ (свойство смежных углов), а правая часть меньше, чем $180°$, так как $\angle AM_2O, \angle AM_1O$ — два угла треугольника M_2OM_1. Значит, на прямой AB точка M из условия задачи имеет уникальное положение. Запомним это.





Рассмотрим точку E — середину стороны CD, и точку F — середину стороны AB. Тогда $ADEF$ — параллелограмм, так как его стороны DE и AF равны и параллельны. Более того, точки E и F симметричны относительно точки O, поэтому прямая EF проходит через точку O. Опустим перпендикуляры ON и EH на сторону AB. Тогда треугольники EHF и ONF подобны по прямому и общему острому углам. Коэффициент подобия равен $1/2$, так как O — середина EF. Тогда N — середина HF, а значит, NO — серединный перпендикуляр отрезка FH, значит, $OF = OH$, а углы OFH и OHF равны как углы при основании равнобедренного треугольника OFH. В свою очередь, $\angle OFH = \angle DAH$ как соответственные углы при $EF \| AD$ и секущей AB. Но тогда $\angle DAH = \angle OHA$. А значит, точка H удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к точке M из условия. В силу уникальности точки M, доказанной выше, H и M совпадают. Но тогда M принадлежит прямой EH, которая является серединным перпендикуляром отрезка CD. Значит, $MC = MD$. ЧТД.

Комментарий. Решение задачи «по чертежу», то есть без обоснования положения точки M, оценивать из 5 баллов. В решении есть идея провести «среднюю линию» EF параллелограмма $ABCD$ — 1 балл.

5. Найдите все возрастающие арифметические прогрессии, состоящие из простых чисел, со свойством: количество членов прогрессии конечно и больше, чем разность прогрессии.

Ответ: $\{2,3\}$, $\{3,5,7\}$.

Решение. Пусть d — разность искомой арифметической прогрессии. Так как мы ищем арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, то d — целое число, а так как прогрессия должна быть возрастающей, то d — натуральное число.

а) Пусть $d = 1$. Тогда по условию в арифметической прогрессии должно быть хотя бы два члена, тогда последовательные члены отличаются на 1, а значит, имеют разную чётность. Итак, в искомой прогрессии есть чётное число, и оно простое, то есть это 2. Тогда арифметическая прогрессия такая 2, 3, 4, 5, 6, ... Но уже третий член — это составное число. Значит, получаем арифметическую прогрессию из двух простых $\{2,3\}$.

б) Пусть $d = 2$. Тогда если a — это первый член прогрессии, то первые три члена (а они точно есть по условию) имеют вид $a, a+2, a+4$, то есть три последовательных натуральных числа одинаковой чётности, среди них есть число, кратное 3, и оно простое. Значит, это 3. И это a. Тогда искомая прогрессия входит в следующую: 3, 5, 7, 9, 11, ... Но уже четвёртый член — это составное число. Значит, получили второй ответ $\{3,5,7\}$.

в) Пусть $d > 2$, тогда $d-1 \geq 2$, а количество членов в искомой арифметической прогрессии не меньше $d+1$. Пусть a — первый член арифметической прогрессии, тогда имеем еще члены $a+d, a+2d, \ldots, a+d\cdot d$, а по модулю $d-1$ эти члены прогрессии сравнимы с числами $a+1, a+2, \ldots, a+d$, то есть с d последовательными натуральными числами. Среди них есть число, кратное $d-1$, то есть хотя бы у одного из наших членов арифметической прогрессии, начиная со второго, есть делитель $d-1 \geq 2$, значит, $d-1$ простое и равно этому члену, но уже второй член возрастающей прогресии $a+d > d > d-1$. Противоречие доказывает, что больше таких арифметических прогрессий нет.

Комментарии. Только правильный ответ — 1 балл.